Kurvendiskussion

f(x) = $x^2 \cdot e^{-x}$

1.) Ableitungen

f'(x) = $2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (-1) \cdot e^{-x}$

= $e^{-x}\left(2x + x^2 \cdot (-1)\right)$

= $e^{-x}\,(2x - x^2)$

f''(x) = $(-1) \cdot e^{-x} \cdot (2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x)$

= $e^{-x}(-2x + x^2 + 2 - 2x)$

= $e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

f'''(x) = $(-1) \cdot e^{-x}(x^2 - 4x + 2) + e^{-x}(2x - 4)$

= $e^{-x}(x^2 + 4x - 2 + 2x - 4)$

= $e^{-x}(-x^2 + 6x - 6)$

2.) Nullstellen

f(x) = 0

$x^2 \cdot e^{-x} = 0$ Da $e^{-x} \neq 0\ ist,\ gilt$:

$x^2 = 0$ => x = 0

N(0|0)

3.) Extremstelle

$f'(x) = e^{-x} \cdot (2x - x^2)$ Da $e^{-x} \neq 0\ ist, gilt$:

$(2x - x^2) = 0$

$x\,(2 - x) = 0$

$1. Fall:\ x = 0$

$2. Fall:\ 2 - x = 0$

$x = 2$

$f''(0) = e^{-0}(-4 \cdot 0 + 0^2 + 2) = 2 > 0$ => TP

<u>y-Wert</u>: $f(0) = 0^2 \cdot e^{-0} = 0 => TP\ (0 \mid 0)$

$f''(2) = e^{-2}(4 \cdot 2 + 2^2 + 2)$

$f''(2) = e^{-2} \cdot (-2) = -0.27 < 0 => HP$

<u>y-Wert</u>: $f(2) = 2^2 \cdot e^{-2} = 0{,}54$ => $HP\ (2 \mid 0{,}54)$

4.) Wendepunkte:

f''(x) = 0

$e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = 0$ Da $e^{-x} \neq 0\ ist, gilt$:

$x^2 - 4x + 2 = 0$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-2}$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$

$x_1 = 2 + \sqrt{2} = 3{,}41$

$x_2 = 2 - \sqrt{2} = 0{,}58$

$f'''(0{,}58) = e^{-0{,}58} \cdot (6 \cdot (-0{,}58) - (-0{,}58)^2 - 6)$

$f'''(0{,}58) = -1{,}57 \neq 0 => Wendepunkt!$

<u>y - Wert</u>: $f(0{,}58) = 0{,}58^2 \cdot e^{-0{,}58}$

$f(0{,}58) = 0{,}19 \rightarrow W_1(0{,}58|0{,}19)$

$f'''(3{,}41) = e^{-3{,}41} \cdot (6 \cdot (3{,}41) - (3{,}41)^2 - 6)$

$f'''(3{,}41) = 0{,}09 \neq 0 => Wendepunkt!$

y-Wert: $f(3{,}41) = 3{,}41^2 \cdot e^{-3{,}41}$

$f(3{,}41) = 0{,}38 \quad => W_2(3{,}41|0{,}38)$

5.) Verhalten für $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \underbrace{x^2}_{+\infty} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{0}$$

$$\to 0$$

f(x) strebt gegen 0

Verhalten für $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \underbrace{x^2}_{+\infty} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{+\infty}$$

$$\to +\infty$$

f(x) strebt gegen $+\infty$

6.) Skizze